TME 8 : Méthode de partitionnement de graphe Min-Cut

Objectif

On souhaite implanter en langage C un algorithme de partitionnement de graphe utilisant la méthode Min-Cut, dont le principe a été présenté en cours.

TME 8 : Partitionnement de Graphe/MinCut

A. Introduction

Soit un graphe G(N, H), où N est l'ensemble des noeuds, et H l'ensemble des arêtes. Une bipartition de G est formée de 2 sous-ensembles L (left) et R (right) de l'ensemble des noeuds N, dont l'intersection est vide, et l'union est égale à N.

En supposant que le nombre de noeud est pair, on dit qu'une bipartition est équilibrée si `L = R = N / 2`

Pour ce qui nous concerne, on s'intéresse à une net-list de cellules précaractérisées, et on cherche à partitionner l'ensemble des cellules en deux sous-ensembles L et R tels que le nombre de signaux traversant la frontière entre les deux sous-ensembles soit minimal.

Nous allons raisonner sur un graphe non-orienté, défini de la façon suivante:

Les noeuds Ci représentent les cellules de la net-list `(0 < i < N-1)`. Il existe une arête entre deux cellules Ci et Cj chaque fois qu'il existe au moins un signal connectant un port de la cellule Ci à un port de la cellule Cj.

Attention: avec cette définition, à un seul signal de la net-list peuvent correspondre plusieurs arêtes dans le graphe: si le signal de sortie d'une porte logique Cx attaque n portes C1 à Cn, on a n arêtes dans le graphe.

On appelle «matrice d'adjacence» {Aij} la matrice carrée N * N qui représente la structure du graphe:

- Aij = 1 si il existe une arête dans le graphe entre les noeuds Ci et Cj
- Aij = 0 sinon

On défini comme suit la fonction de coût du problème d'optimisation MinCut?:

```
FC = Somme  Aij * Kij
          i,j

avec Kij = 1 si les cellules Ci et Cj sont de part et d'autre de la frontière
     Kij = 0 sinon
```

B. Algorithme MinCut? glouton

On part d'une bi-partition équilibrée initiale arbitraire en deux ensembles L et R, et on cherche à optimiser la fonction de coût FC, sans forcément rechercher le minimum absolu, mais avec un temps de calcul très court.

L'idée de base de l'algorithme est de pré-calculer, pour chaque cellule Ci un gain G(i) représentant la variation de la fonction de coût FC lorsqu'on déplace la cellule Ci d'un côté de la frontière à l'autre (sans déplacer aucune autre cellule).

Le gain G(i) est défini par:

```
G(i) =   Somme  Aij * Dij
                  j
avec Dij = +1 si les cellules Ci et Cj sont de part et d'autre de la frontière
         Dij = -1 sinon
```

Après avoir calculé le gain G(i) pour toutes les cellules Ci, on classe les cellules dans deux listes ordonnées par gain décroissant (une liste GAIN_L pour les cellules appartenant à L et une liste GAIN_R pour les cellules appartenant à R).

On transfère la première cellule Ci de la liste ordonnée GAIN_L vers R, on met à jour les gains des cellules adjacentes à Ci, ainsi que l'ordre des listes GAIN_L et GAIN_R. La cellule Ci transférée dans R n'est pas rangée dans GAIN_R, car elle n'est plus autorisée à bouger.

On transfère la première cellule Ci de la liste ordonnée GAIN_R vers L, on met à jour les gains des cellules adjacentes à Ci, ainsi que l'ordre des listes GAIN_L et GAIN_R. La cellule Ci transférée dans L n'est pas rangée dans GAIN_L, car elle n'est plus autorisée à bouger.

On recommence les deux étapes ci-dessus tant que cet échange entraîne une diminution de la fonction de coût.

C. Structures de données

On a besoin de deux structures de données séparées pour représenter d'une part le graphe à partitionner, et d'autre part les listes GAIN_L et GAIN_R. Cette seconde structure de donnée étant utilisée pour calculer les mouvements de cellules à effectuer, est appelée «gestionnaire de mouvements».

C.1. représentation du graphe

Les noeuds du graphe sont identifiés par un index compris entre 0 et (NBNODE-1).

La structure du graphe est représentée par un tableau NODE[ ] indexé par le numéro du noeud (la taille du tableau est donc égale à NBNODE). Chaque case du tableau NODE[i] contient un pointeur sur une liste de bi-pointeurs représentant l'ensemble des noeuds adjacents au noeud [i]. Il y a donc un bipointeur pour chaque arête attachée au noeud[i].

Un second tableau PART[ ] est lui aussi indexé par le numéro du noeud. Chaque case PART[i] contient un entier définissant à quel sous-ensemble appartient le noeud [i]: (valeur 0 pour l'ensemble L, et valeur 1 pour l'ensemble R).

Le graphe est donc représenté par la structure suivante:

```
typedef struct graph_t {
  unsigned      NBNODE; // nombre de noeuds du graphe
  bip_t *       * NODE; // pointeur sur le tableau NODE[NBNODE]
  unsigned      * PART; // pointeur sur le tableau PART[NBNODE]
} graph_t
```

C2. représentation du gestionnaire des mouvements

On appelle arité d'un noeud du graphe, le nombre d'arêtes attachées à ce noeud. Le gain maximum G(i) associé au mouvement d'un noeud [i] est au plus égal à l'arité du noeud [i]: Ce gain peut être positif ou négatif, mais sa valeur absolue ne peut pas être supérieure au nombre des noeuds auquel il est connecté. Soit GMAX la valeur maximale de l'arité (en considérant tous les noeuds du graphe). Pour tout noeud [i] du graphe, on a donc GMAX < G(i) < GMAX

Pour représenter la liste ordonnée GAIN_L, on effectue une partition de l'ensemble des cellules appartenant à L, en regroupant dans un même sous ensemble tous les noeuds possédant le même gain. Ce sous ensemble est représenté par une liste doublement chaînée, dont chaque élément de type bichain_t contient un index de noeud. On définit un tableau de pointeurs GAIN_L[ ] possèdant 2 * GMAX + 1 cases, et indexé par une valeur de gain comprise entre GMAX et GMAX. Chaque case correspond à une valeur de gain, et contient un pointeur sur une des listes doublement chaînées définies ci-dessus.

On fait la même chose pour représenter la liste GAIN_R.

Au début de l'algorithme, chaque noeud du graphe est inséré dans la liste chaînée qui correspond à sa valeur de gain. Au fur et à mesure que les noeuds sont transférés, les listes se vident, car un noeud qui a subi un mouvement n'est plus autorisé à bouger. Puisque le gain des noeuds changent au cours de l'algorithme, un même noeud peut être retiré d'une liste et inséré dans une autre, ce qui justifie l'utilisation de listes doublement chaînées.

Dans la structure de donnée «graphe_t» représentant le graphe, les noeuds du graphe sont identifiés par leur index. On a donc besoin d'introduire dans la structure «move_manager_t» représentant le gestionnaire de mouvements, un tableau de pointeurs NODES [ ], indexé par le numéro du noeud, et contenant un pointeur sur la structure bichain_t représentant un les noeuds du graphe dans les listes doublement chaînées GAIN_L et GAIN_R. On utilise donc les structures suivantes:

```
typedef struct bichain_t {
  bichain_t     *NEXT;  // pointeur sur le noeud suivant de même gain
  bichain_t     *PREV;  // pointeur sur le noeud précédent de même gain
  unsigned      INODE;  // index du nSud
  int           IGAIN;  // index dans le tableau des gains
  unsigned  PART;   // numero de la partie 0 pour R, 1 pour L
```

```
} bichain_t

typedef struct move_manager_t {
  int       GMAX;           // la taille des tableaux GAIN_R et GAIN_L est égale à 2*GMAX+1
  bichain_t **GAIN_L;   // pointeur sur le tableau de pointeurs pour la partie gauche
  bichain_t **GAIN_R;   // pointeur sur le tableau de pointeurs  pour la partie droite
  int       LX;                 // index de la première case non vide de GAIN_L (init à -1)
  int       RX;                 // index de la première case non vide de GAIN_R (init à -1)
  bichain_t **NODES;    // pointeur sur le tableau de pointeurs sur les noeuds
} move_manager_t
```

D. Fonctions d'accès aux structures de données

On dispose d'un ensemble de fonctions permettant de construire et de manipuler les deux structures de données graph_t et move_manager_t.

D.1. graph_t * parse_graph(char *filename)

Cette fonction prend pour argument un nom de fichier au format.dot représentant le graphe à partitionner, et construit en mémoire la structure graph_t correspondante, et renvoie un pointeur sur cette structure. Si aucune partition initiale n'est définie dans le fichier .dot, les noeuds d'index inférieur à NBNODE/2 sont arbitrairement rangés dans le sous-ensemble L, et les noeuds d'index supérieur à NBNODE/2 sont rangés dans le sous-ensemble R.

Un exemple de fichier au format .dot est donné ci-dessous. Les noeuds du graphe sont identifiés par un index, il y a une ligne par arête, les deux sous-graphes cluster0 et cluster1 définissent la partition initiale et sont optionnels.

```
graph
{
  // les clusters sont optionnels
  subgraph cluster0 {0 1 2 3}
  subgraph cluster1 {4 5 6 7}
  0--4
  0--5
  0--7
  1--5
  3--7
  1--2
  5--6
}
```

D.2. void drive_graph(graph_t *p, char *filename)

Cette fonction prend en paramètre un pointeur p sur une structure graph_t, ainsi que le nom du fichier de sortie, et écrit sur disque un fichier au format .dot, en conservant dans le fichier les informations de partition (sous-ensemble L et R). Ce format est affichable sous forme graphique et permet de visualiser la partition.

D.3. bichain_t * cons_bichain (bichain_t *prev, bichain_t *next, unsigned inode, int igain, unsigned part)

Cette fonction alloue la mémoire nécessaire pour créer un élément d'une liste doublement chaînée, elle initialise les différents champs de cette structure, et renvoie un pointeur sur cette structure.

D.4. void free_bichain (bichain_t *p)

Cette fonction libère la mémoire allouée lors de la construction de l'objet bichain_t par la donction cons_bichain().

D.5. move_manager_t * cons_move_manager(graph_t *p)

Cette fonction pend pour argument un pointeur sur la structure représentant le graphe partitionné, et construit en mémoire la structure move_manager_t correspondant à cette partition.

D.6. void add_node (move_manager_t *mm, bichain_t *node)

Cette fonction prend pour arguments un pointeur sur la structure représentant les gestionnaire de mouvements, un pointeur sur un élément de liste doublement chaînée (représentant un noeud), contenant l'index du nSud dans le graphe, un entier représentant l'index dans le tableau GAIN_R ou GAIN_L, et un entier définissant le sous-ensemble d'appartenance (0 pour R, 1 pour L). Elle range ce noeud dans la liste doublement chaînée correspondante, elle met à jour le tableau NODES et les index LX ou LR. Les champs NEXT et PREV du nSud ne sont pas utilisés, ils sont initialisés par la fonction add_node elle-même.

D.7. bichain_t * del_node(move_manager_t *mm, bichain_t *node)

cette fonction prend pour arguments un pointeur sur la structure représentant les gestionnaire de mouvements, et un pointeur sur un élément de liste doublement chaînée (représentant un noeud). Elle retire cet élément de la liste doublement chaînée, et renvoie un pointeur sur la structure bichain_t pour une éventuelle libération de la mémoire.

D.8. int compute_gain (graph_t *g, unsigned index)

Cette fonction prend pour argument un pointeur sur la structure représentant le graphe, un index désignant un noeud particulier, et calcule le gain associé à ce noeud, pour la partition courante.

D.9. int global_cost (graph_t *g)

Cette fonction prend pour argument un pointeur sur la structure représentant le graphe, calcule la fonction de coût globale pour la partition courante, et renvoie la valeur calculée.

E. Travail à réaliser

Nous vous proposons un programme à trous. Vous allez pouvoir remplacer progressivement les fichiers objets fournis par vos propres fichiers objet.

E.1. Construction et initialisation du gestionnaire de mouvements

C'est un point important puisque que c'est la structure de base de l'algorithme. Vous disposez pour vous aidez d'une fonction dump_move_manager() qui affiche le contenu de la structure.

E.2. Ecriture de l'algorithme MinCut? glouton

Ecrivez la boucle réalisant les transferts de cellules tant que le transfert d'une paire de cellules améliore la fonction de coût FC.

E.3. Exécution et évaluation

Exécutez cet algorithme sur différents graphes que vous définirez vous-mêmes. La partition résultante est-elle toujours la partition optimale? Pourquoi? Donnez un contre-exemple.

E.4. Ecriture des fonctions

Ecrire les différentes fonctions d'accès aux structures de données définies dans la partie D, et validez ces fonctions en les intégrant peu à peu dans votre programme.

E.5. construction du graphe en mémoire

L'objectif est ici d'écrire la fonction parse_graph(), en utilisant lex et yacc. Nous vous suggérons de supposer qu'il n'y a pas de clusters dans le fichier, puis de les introduire. Si vous n'avez pas le temps de construire le graphe, étudiez au moins la grammaire de ce petit langage.