Chapitre 1

La Conversion $\Sigma\Delta$

1.1 Introduction

Dans ce chapitre les principes de la conversion $\Sigma\Delta$ sont présentés [1][2][3]. Ces principes sont le suréchantillonnage et la mise en forme du bruit.

1.2 La Quantification

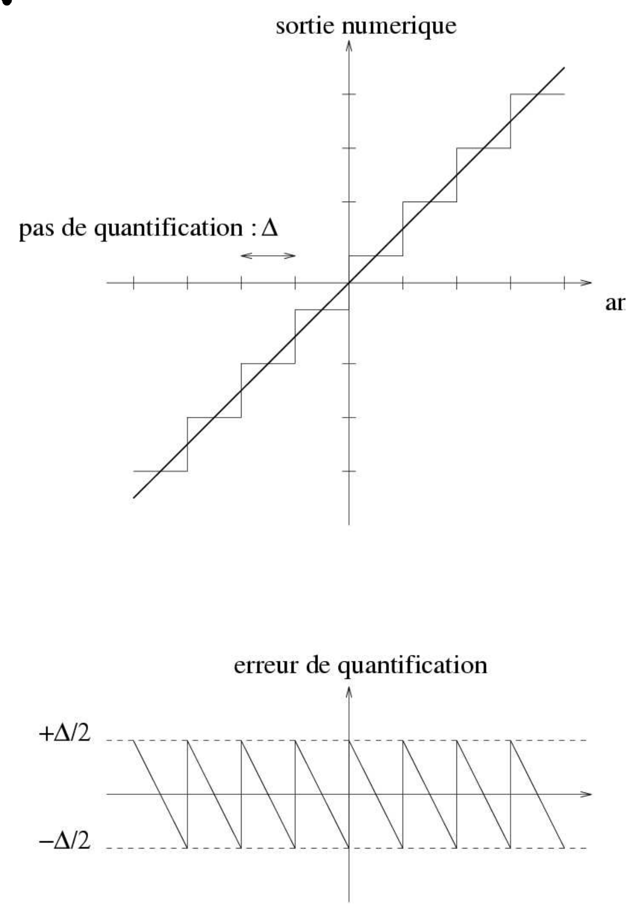

Fig. 1.1 – la quantification

Le fait d'échantillonner un signal à la fréquence de Nyquist,

$$f_{\text{Nyquist}} = 2 * f_{\text{maximum du signal}} \tag{1.1}$$

n'introduit pas de distorsion sur le signal, mais la quantification introduit une erreur sur le signal. Cette erreur illustrée dans la figure 1.1 est due à la représentation d'une valeur analogique qui peut prendre une infinité de valeur par une valeur numérique qui est codée avec un nombre limité de bits. Avec un pas de quantification égal à Δ, l'erreur de quantification sera limitée entre $\pm\Delta/2$. Si on considère que le signal d'entrée change de façon aléatoire d'un échantillon à l'autre, alors on peut considérer l'erreur de quantification comme un bruit blanc réparti de façon uniforme dans l'intervalle $\pm\Delta/2$ (figure 1.2).

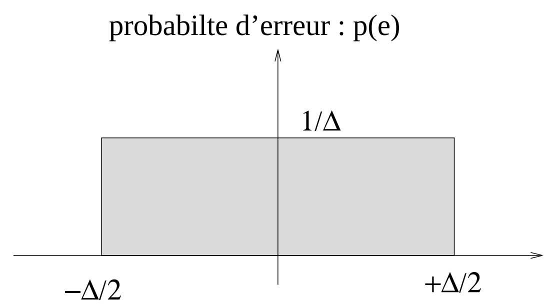

FIG. 1.2 – Répartition du bruit de quantification

La variance du bruit de quantification :

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 dq = \frac{\Delta^2}{12} \tag{1.2}$$

La densité spectrale de puissance du bruit de quantification :

$$|E(f)|^2 = \frac{\sigma_q^2}{f_s} = \frac{\Delta^2}{12 f_s} \tag{1.3}$$

où f_s est la fréquence d'échantillonnage.
La puissance du bruit de quantification dans la bande utile :

$$P_q = \int_{-f_m}^{f_m} |E(f)|^2 df = \frac{\Delta^2}{12OSR} \tag{1.4}$$

où f_m est la fréquence maximum du signal et OSR (Over Sampling Ratio) est le rapport de suréchantillonnage :

$$OSR = \frac{f_s}{2 f_m} \tag{1.5}$$

Maintenant nous allons étudier l'influence du rapport de suréchantillonnage OSR sur le rapport signal sur bruit SNR (Signal to Noise Ratio). Pour un signal d'amplitude A et pour un quantificateur N bits, nous avons :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{2.A}{2^N} = \frac{A}{2^{N-1}} \\
SNR &= \frac{P_{signal}}{P_q} = \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{\Delta^2}{12OSR}} \\
SNR\,[dB] &= 10\log 2^{2N-2} * 12OSR \\
SNR\,[dB] &= 1.76 + 6.02N + 10\log OSR \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

L'équation 1.6 montre qu'en doublant la fréquence d'échantillonnage on ne gagne que 3dB, c'est à dire 0.5 bits de résolution supplémentaire.

1.3 La Mise en Forme du Bruit

1.3.1 ΣΔ 1er Ordre

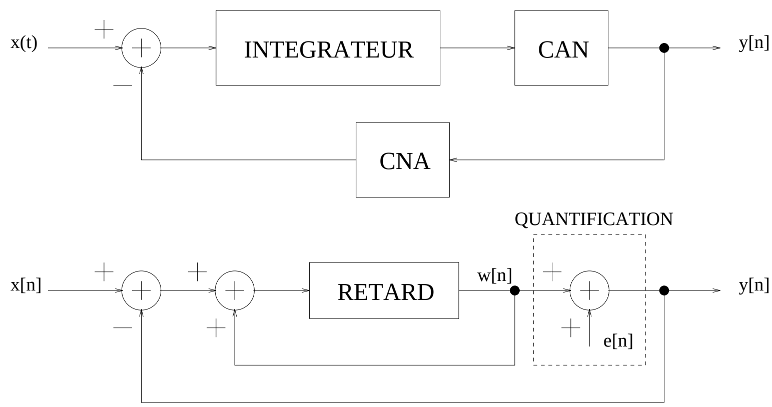

FIG. 1.3 – un sigma-delta de 1er ordre et son modèle linéaire équivalent.

Le schéma dans la figure 1.3 représente le circuit équivalent pour un modulateur de 1er ordre où le quantificateur est représenté par une erreur additionnée sur le signal. Sachant que la fonction de transfert de l'intégrateur est égale à :

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{1.7}$$

Nous pouvons trouver une expression pour le signal de sortie du modulateur ΣΔ de 1er ordre :

$$Y(z) = (1 - z^{-1})E(z) + z^{-1}x(z) \tag{1.8}$$

En appliquant la transformée en z inverse de l'equation(1.8), on trouve :

$$y[n] = x[n-1] + e[n] - e[n-1] \tag{1.9}$$

Ce circuit dérive l'erreur de quantification, l'erreur à l'instant n est alors égale à la différence entre l'erreur à l'instant n et celle à l'instant $n-1$, alors que le signal n'est modifié que par un retard. Ce qui veut dire que, si la fréquence d'échantillonnage est très supérieure à la fréquence du signal, soit pour les signaux à fréquences relativement basses où l'amplitude du signal change très peu d'un échantillon à l'autre, alors l'erreur de quantification sera très faible. Mais il est clair que pour les hautes fréquences cette erreur va augmenter. En ce qui suit nous allons étudier le bruit de quantification dans le domaine de fréquence.
A partir de l'équation 1.9 on définit $n[n]$ comme le bruit (noise) de quantification à l'instant n :

$$n[n] = e[n] - e[n-1]$$

Appliquant la transformée en Z :

$$N(z) = E(z)(1 - z^{-1})$$

Puisque $z = e^{j2\pi fT}$ où $T = 1/f_s$

$$\begin{aligned} N(f) &= E(f)(1 - e^{-\frac{j2\pi f}{f_s}}) \\ |N(f)| &= 2E(f)sin(\frac{\pi f}{f_s}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

La densité spectrale du bruit de quantification :

$$|N(f)|^2 = 4|E(f)|^2 sin^2(\frac{\pi f}{f_s})$$

A partir de l'équation 1.3 :

$$|N(f)|^2 = 4\frac{\Delta^2}{12f_s} sin^2(\frac{\pi f}{2f_s}) \tag{1.11}$$

La puissance du bruit dans la bande utile :

$$\int_{-fm}^{fm} |N(f)|^2 df = \frac{\Delta^2}{12}\frac{\pi^2}{3}(\frac{1}{OSR})^3 \tag{1.12}$$

L'équation 1.12 montre qu'en doublant la fréquence d'échantillonnage on gagne 9dB, c'est à dire 1.5 bits de résolution supplémentaire.

1.3.2 ΣΔ 2ème Ordre

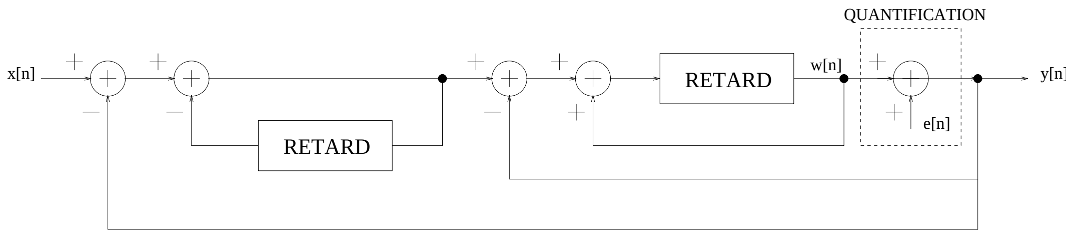

FIG. 1.4 – un sigma-delta de 2ème ordre

Le schéma dans la figure 1.4 représente le circuit équivalent pour un modulateur de 2ème ordre. Nous pouvons trouver une expression pour le signal de sortie du modulateur ΣΔ de 1er ordre :

$$Y(z) = (1 - z^{-1})^2 E(z) + z^{-1} x(z) \tag{1.13}$$

En appliquant la transformée en z inverse de l'equation(1.13), on trouve :

$$y[n] = x[n-1] + e[n] - 2e[n-1] + e[n-2] \tag{1.14}$$

$$n[n] = e[n] - 2e[n-1] + e[n-2]$$

Appliquant la transformée en z :

$$N(z) = E(z)(1 - z^{-1})^2$$

Puisque $Z = e^{j2\pi fT}$ où $T = 1/f_s$,

$$\begin{aligned} N(f) &= E(f)(1 - e^{-\frac{j2\pi f}{f_s}})^2 \\ |N(f)| &= 4E(f) sin^2(\frac{\pi f}{f_s}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

La puissance du bruit dans la bande utile :

$$\frac{\Delta^2}{12} \frac{\pi^4}{5} (\frac{1}{OSR})^5 \tag{1.16}$$

L'équation 1.12 montre qu'en doublant la fréquence d'échantillonnage on gagne 15dB, c'est à dire 2.5 bits de résolution supplémentaire.

Bibliographie

[1] J.C. Candy and G.C. Temes, editors. *Oversampling Delta-Sigma Data Converters*. IEEE press, 1992.

[2] S.R. Northworthy, R. Schreier, and G.C. Temes, editors. *Delta-Sigma Data Converters*. IEEE press, 1997.

[3] F. Baillieu, Y. Blanchard, P. Loumeau, H. Petit, and J. Porte. *Capacités Commutées et Applications*. DUNOD, 1996.